

# Matematika II

- BATXILERGOA
- LANDIBE HEZIKETA
- GOI MAILAKO HEZIKETA ZIKLOAK

Azterketa

Kalifikazio eta zuzenketa irizpideak



eman ta zabal zazu



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

NAZIOARTEKO  
BIKANTASUN  
CAMPUSA

CAMPUS DE  
EXCELENCIA  
INTERNACIONAL



***Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu. Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.***

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

***Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.***

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.



## A AUKERA

### A1 Ariketa

Ekuzio linealen sistema hau emanda:

$$-x + my + 2z = m$$

$$2x + my - z = 2$$

$$mx - y + 2z = m$$

- Deskriba ezazu nola jokatzen duen sistemak  $m$  parametroaren balioen arabera.
- $m = -1$  kasuan, ebatz ezazu sistema, ahal baldin bada. Ezinezkoa bada, azaldu ezazu zergatia.

### A2 Ariketa

$P(2, -1, 3)$  puntua eta  $r$ ,  $\frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$ , zuzena emanda:

- Kalkula ezazu  $P$  puntuaren  $r$  zuzenaren gaineko proiektzioa.
- Kalkula ezazu  $P$ -ren eta  $r$ -ren arteko distantzia.
- Lor ezazu  $P$  puntuaren  $r$  zuzenarekiko simetrikoa.

### A3 Ariketa

- $f(x) = x^3 - 3x + 1$  funtzioa emanda, azter itzazu haren goratze- eta beheratze-tarteak eta maximo eta minimoak.
- Egin ezazu  $f$ -ren gutxi gorabeherako irudikapen grafiko bat, eta erantzun iezaiozu, arrazoituz, galdera honi:  $x$ -ren zenbat baliok betetzen dute  $f(x) = 0$  izatea?

### A4 Ariketa

Marraztu ezazu  $y = x^2 - 6x$  funtzioaren grafikoaren eta  $y = 3x$  funtzioaren grafikoaren artean itxitako esparrua, eta kalkula ezazu haren azalera.

### A5 Ariketa

Kaxa kubiko baten (hiru dimentsioak berdinak dira) hiru dimentsioak honela aldatu dira: altuera % 20 handitu da, zabalera % 20 gutxitu da eta luzera bera mantendu da.

- Eragiten dio aldaketa horrek bolumenari? Zenbat?
- Kaxa berriaren azalera osoa % 20 baino gehiago gutxitzen da?



## B AUKERA

### B1 Ariketa

Matrize hau emanda:  $A = \begin{pmatrix} c+d & d \\ 2c & c+d \end{pmatrix}$

- Zehaztu ezazu  $c$ -ren eta  $d$ -ren zer baliotarako duen  $A$  matrizeak alderantzizkoa.
- Zehaztu ezazu  $A^2$  matrizearen alderantzizkoa  $c = 1$ ;  $d = -2$  kasurako.

### B2 Ariketa

$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases}$  zuzena eta  $3x - 5y + Az = -31$  plano emanda,

- kalkula ezazu zer balio izan behar duen  $A$  parametroak zuzena eta plano paralelo izan daitezen.
- $A = 12$  kasurako, kalkula ezazu zuzenaren eta planoaren arteko ebakidura.

### B3 Ariketa

Badakigu  $A$  eta  $B$  zenbaki positiboen karratuen batura 32 dela. Kalkula itzazu zenbaki horiek haien arteko biderkadura,  $A \cdot B$ , maximoa izan dadin.

### B4 Ariketa

Aurkitu ezazu integral mugagabe hau:

$$\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)} dx$$

Azaldu ezazu kalkulatzeko erabilitako metodoa.

### B5 Ariketa

3 zenbakiaren ondoz ondoko 21 multiplo baturik, 1.260 balioa lortzen da. Batuketa horretan, zein da 3ren lehen multiploa? Eta azkena?



## MATEMATIKA II

### EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa guztira 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik egotekotan).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

### Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

#### A AUKERA

##### A.1 ariketa (2 puntu)

- Sistema modu egokian ebaztea eta eztabaidatzea (puntu bat)
- Problema ondo ebaztea  $m = -1$  kasuan (puntu bat)

##### A.2 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea eta P-ren r zuzenaren gaineko proiektzioa lortzea (puntu bat)
- P-tik r zuzenerainoko distantzia lortzea (edo, bestela, P-tik beraren proiektzioa den punturainokoa) (0,5 puntu)
- P-ren r zuzenarekiko puntu simetrikoa kalkulatzeko (0,5 puntu)

##### A.3 ariketa (2 puntu)

- Funtzioaren deribatua lortzea eta funtzioaren goratze eta beheratzeari buruzko eztabaida egitea, bai eta maximoak eta minimoak lortzea ere (puntu bat)
- Funtzioa gutxi gorabehera marraztea, eta zuzen adieraztea zenbat baliok ezeztatzen duten funtzioa (puntu bat)

##### A.4 ariketa (2 puntu)

- Bi parabolak marraztea eta esparrua lortzea (puntu bat)
- Esparruaren azalera lortzea Barrow-ren erregela aplikatuz (puntu bat)

##### A.5 ariketa (2 puntu)

- Bolumen berria lortzea eta aurrekoarekin konparatzea. Esan behar lukete % 4 gutxitzen dela; halaber, ontzat emango litzateke 0,96 V balioa jartzea eta aipatzea jatorrizkoarekiko % 5 inguru gutxitzen dela (puntu bat).
- Kaxa berriaren azalera osoa lortzea 3,52 A baliora iritsiz; gero, adieraztea zenbat izan den gutxitze hori eta, amaitzeko, % 20 baino gehiago izan dela esatea (puntu bat)



## B AUKERA

### B.1 ariketa (2 puntu)

- Matrizearen determinantea modu egokian ebaztea eta eztabaidatzea, eta c-ren eta d-ren gaineko baldintza lortzea (puntu bat)
- Alderantzizko matrizea lortzea eskatutako kasurako (puntu bat)

### B.2 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea planoak eta zuzenak paraleloak izan behar dutelako baldintza ezarriz, planoarekiko normala den bektorearen eta zuzenaren bektore zuzentzailearen biderkadura eskalarra nulua izan behararen bidez (puntu bat)
- Planoaren eta zuzenaren arteko ebakidura den puntua ondo ebaztea (puntu bat)

### B.3 ariketa (2 puntu)

- Maximizatu beharreko funtzioa lortzea (puntu bat)
- Eskatutako balioak kalkulatzeko, helburu den funtzioaren deribatua nulua izan beharra ezarriz eta, ondoren, eztabaidatuz (puntu bat)

### B.4 ariketa (2 puntu)

- Funtzioa frakzio sinpletan deskonposatzea eta haietako bakoitza lortzea (puntu bat)
- Hiru integralak kalkulatzeko (puntu bat)

### B.5 ariketa (2 puntu)

- Edozein adierazpide erabiliz (zenbakizkoa, analitikoa, geometrikoa...), problema planteatzea (puntu bat)
- Zuzen ebaztea edozein prozedura erabilita (puntu bat)



## EBAZPENAK

### A AUKERA

#### A.1 ariketa

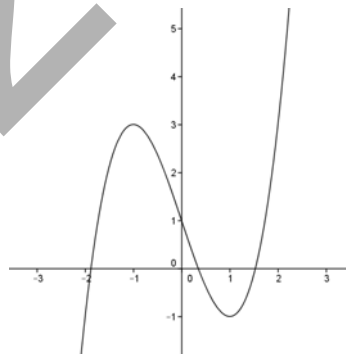
- a) Sistemaren determinantea  $|A| = 3m^2 - 6m - 3$  da;  $m = -1$  baliorako ezeztatu egiten da, eta, beraz, sistema bateragarri eta mugatua da  $m$ -ren  $-1$  ez den edozein baliotarako.
- b)  $m = -1$  baliorako, matrizearen heina 2 da, eta zabalduaren heina 2 da; beraz, sistema bateragarri mugagabea da, eta soluzioa  $(a + 1, a, a)$  da,  $a$  zenbaki erreal bat izanik.

#### A.2 ariketa

- a) P puntutik pasatzen den eta bektore normal gisa zuzenaren bektore zuzentzailea duen plano horren eta zuzenaren arteko ebakidura aurkituko dugu. Hala, P puntuaren  $r$  zuzenaren gaineko proiektzioa lortuko dugu.
- b) Hau da plano:  $3x + 5y + 2z = 7$ , eta proiektzioa puntu hau da:  $M(3, -2, 4)$ .
- c) P-ren eta  $r$ -ren arteko distantzia P eta M puntuen arteko distantzia bera da, eta emaitza  $\sqrt{3}$  da. Hau da P-ren puntu simetrikoa:  $T(4, -3, 5)$ .

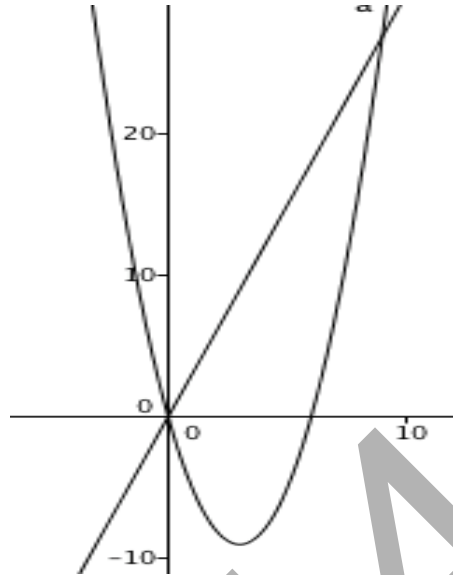
#### A.3 ariketa

- a) Deribatuz eta zerora berdinduz, puntu kritikoak lortuko ditugu. Gure kasuan,  $x = 1$  (minimoa) eta  $x = -1$  (maximoa).
- b) Funtzioa gorakorra da  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  tartean, eta beherakorra  $(-1, 1)$  tartean.



Ikus daiteke hiru baliotan ezeztatzen dela funtzioa.

#### A.4 ariketa



Grafikoek  $x = 0$  eta  $x = 9$  puntuetan ebakitzen dute elkar. Esparruaren azalera Barrow-en erregela aplikatuz lortzen da; hau da:

$$A = \int_0^9 (3x - x^2 + 6x) dx = \frac{729}{6} = \frac{243}{2}.$$

#### A.5 ariketa

- a) Kaxa kubikoaren jatorrizko bolumena  $V = x^3$  da, eta, aldaketen ondoren, bolumen berria  $V' = (1,2x) \cdot (0,8x) \cdot x = 0,96x^3$  da; beraz, bolumena % 4 gutxitzen da.
- b) Azalera osoa, lehen kasuan,  $A = 6x^2$  da; bigarren kasuan, berriz, hau da:

$$A' = 2(1,2x^2 + (0,8)(1,2)x^2 + 0,8x^2) = 5,92x^2;$$

beraz, azalera osoa ez da % 20 baino gehiago gutxitzen (zeren eta jatorrizko balioa % 20 murriztuz gero, hau izango bailitzateke:  $A = 4,8x^2$ ).





**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN  
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

**EBAZPENAK**

**B AUKERA**

**B.1 ariketa**

a)  $A$ -k alderantzizkoa izango badu, haren determinanteak zeroz bestelakoa izan behar du. Garatuz, hau izango dugu:  $|A| = c^2 + d^2$ ; beraz,  $c = d = 0$  kasuan,  $A$  matrizeak ez du alderantzizkorik izango.

b)  $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ -ren alderantzizko matrizea kalkulatu nahi dugu.

Hau da haren alderantzizkoa:  $\begin{pmatrix} \frac{-3}{25} & \frac{-4}{25} \\ \frac{4}{25} & \frac{-3}{25} \end{pmatrix}$ , eta  $A^2$  matrizearen determinantea 25

da.

**B.2 ariketa**

a) Paraleloak izango badira, planoaren bektore normalak eta zuzenaren bektore zuzentzaileak perpendikularrak izan behar dute. Horrenbestez, haien biderkadura eskalarrak zero izan behar du. Planoaren bektore normala  $(3, -5, A)$  da, eta zuzenaren bektore zuzentzailea  $(-3, -7, -1)$  da. Produktu eskalarraren baldintza ezarrita, hau ateratzen da:  $A = 26$ .

b)  $A = 12$  kasurako, ebakidura  $(2, 5, -1)$  puntua da.

**B.3 ariketa**

$P = x \cdot y$  maximizatu nahi dugu, baldintza honekin:  $x^2 + y^2 = 32$ ; beraz,  $P = x \cdot \sqrt{32 - x^2}$  funtzioaren maximoa lortu behar da.  $P$  deribatuz eta zerora berdinduz, 4 balioa lortuko dugu A-rako eta B-rako.

**B.4 ariketa**

Integral arrazional bat da. Integrazioaren izendatzaileak hiru erro bakun ditu: 1, 2 eta 3. Integrala frakzio sinpletan deskonposaturik, emaitza hau lortuko dugu:

$$\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)} dx = 5\ln(x-1) - 13\ln(x-2) + 8\ln(x-3) + C$$

**B.5 ariketa**

3ren lehen multiploari  $x$  deituz gero, ekuazio hau idatz dezakegu:

$$x + (x + 3) + (x + 60) = 1260,$$

eta, hortik,  $21x + 630 = 1260$ . Ebatziz, hau ateratzen da:  $x = 30$  Beraz, lehen multiploa 30 da, eta azkena 90.