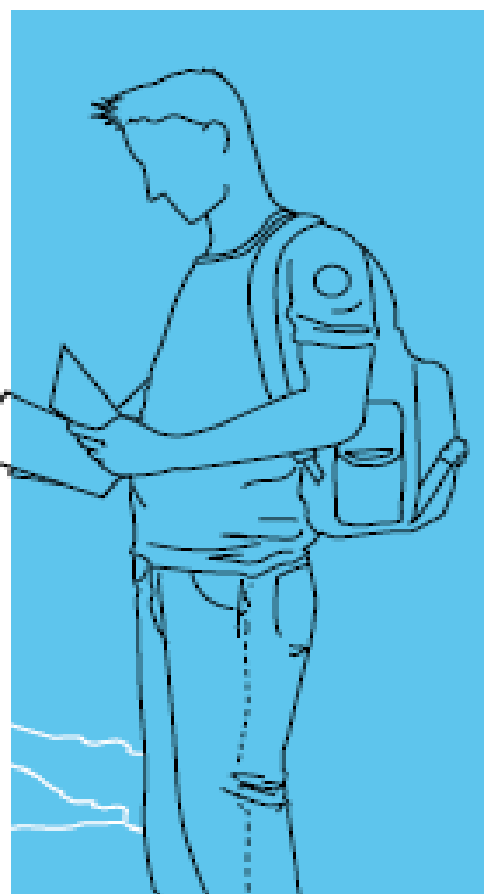
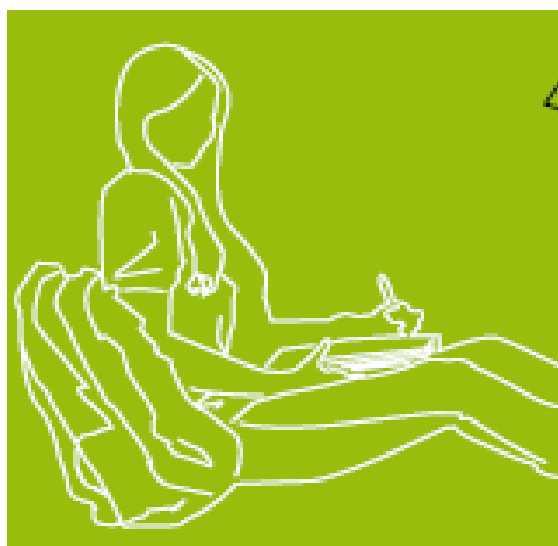
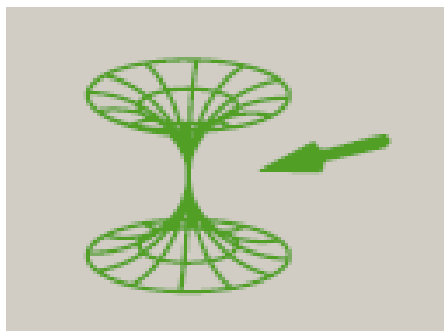
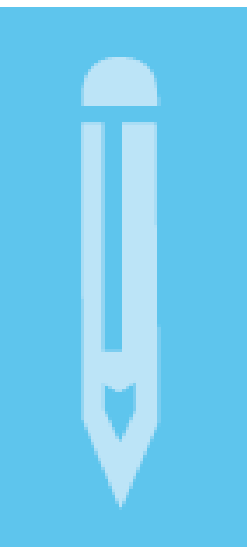


# Matematika II

- BATXILERGOA
- LANBIDE HEZIKETA
- GOI MAILAKO HEZIKETA-ZIKLOAK

Azterketa

Kalifikazio eta zuzenketa irizpideak



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

NAZIOARTEKO  
BIKAIN TASUN  
CAMPUSA

CAMPUS DE  
EXCELENCIA  
INTERNACIONAL



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2013ko UZTAILA

**MATEMATIKA II**

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JULIO 2013

**MATEMÁTICAS II**

***Azterketa honek bi aukera ditu. Horietako bati erantzun behar diozu. Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.***

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

***Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.***

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.



**A1 ariketa**

Ekuazio-sistema hau emanda:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ ay - z = -1 \\ x + 2ay = 0 \end{cases}$$

- a) Egin eztabaida  $a$ -ren balioen arabera.
- b) Ebatzi sistema, bateragarri indeterminatua denean.

**A2 ariketa**

$P(1,0,-2)$  puntua eta  $r$  zuzena —honela definitua:  $\begin{cases} 2x + y - 4z = 7 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$  — emanda:

- a) Zehaztu ezazu zuzen bat,  $r$  ebakitzen duena,  $r$ -ren perpendikularra dena eta  $P$  puntutik pasatzen dena.
- b) Kalkula ezazu  $P$  puntuaren eta  $r$  zuzenarekiko haren simetrikoa den  $Q$  puntuaren arteko distantzia.

**A3 ariketa**

Elektronikako denden frankizia batek kalkulatu du asteko irabaziak (mila eurokotan adierazia) irekia duen  $n$  denda kopuruaren mende daudela, adierazpen honen arabera:

$$B(n) = -4n(2n^2 - 15n + 24).$$

Arrazoituz, kalkula ezazu hau:

- a) Zenbat denda izan behar dituen asteko irabaziak maximoak izan daitezen.
- b) Irabazi maximo horien balioa.

**A4 ariketa**

Hiru funtzio hauek emanda:  $f(x) = 1/x$ ,  $g(x) = 9x$ ,  $h(x) = 25x$

- a) Marraztu ezazu lehen koadrantean hiru grafikek mugatzen duten esparrua.
- b) Kalkula ezazu esparru horren azalera.

**A5 ariketa**

$N = 3^{120} \times 7^{140}$  zenbakia oso handia da. Jakingo zenuke lortzen batekoei dagokien digitua? Arrazoitu erantzuna.



## B AUKERA

### B1 ariketa

Matrize hau emanda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & m \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 7 & m \end{pmatrix}$$

- Azter ezazu  $A$ -ren heina  $m$  parametroaren balioen arabera.
- $m = 0$  baliorako, kalkula ezazu  $A$ -ren alderantzizko matrizea.

### B2 ariketa

$A = (1, -1, 0)$  eta  $B = (2, 0, 3)$  puntuak emanda.

- Aurkitu al daiteke plano bat  $A$  eta  $B$  lotzen dituen zuzenarekiko perpendikularra dena eta, gainera,  $C = (2, 2, 3)$  puntutik pasatzen dena? Baiezkoan, aurkitu ezazu plano horren ekuazioa; ezezkoan, arrazoitu erantzuna.
- Aurkitu daiteke  $A$ ,  $B$  eta  $C$ -tik pasatzen den zuzen bat? Baiezkoan, aurkitu ezazu zuzen horren ekuazioa; ezezkoan, arrazoitu erantzuna.

### B3 ariketa

$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$  funtzioa emanda:

- Kalkula itzazu  $A$ ,  $B$  eta  $C$  parametroen balioak, funtzioak  $x = 0$ -an mutur bat izan dezan eta  $x = 2$ -an beste mutur bat izan dezan. Balio bakarrekoak dira parametro horiek?
- Zehaztu ezazu zer mutur mota den (maximoa edo minimoa).
- Irudika ezazu funtzioa  $C = 0$  kasuan.

### B4 ariketa

Azaldu ezazu zer den zatikako integrazioaren metodoa, eta aplikatu ezazu integral hauek kalkulatzeko:

$$\int x \ln(x) dx \quad \text{eta} \quad \int x \cos(2x) dx.$$

### B5 ariketa

13ren ondoko ondoko 25 multiploren batura 7.150 da.

- Zein da batura horretan agertzen den 13ren lehenengo multiploa?  
Zein da batura horretan agertzen den 13ren azken multiploa?



## MATEMATIKA II

### EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa guztira 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra bai eta atal bakoitzaren planteamendua ere (egotekotan).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

### Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

#### A AUKERA

##### A.1 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- a) Sistemaren eztabaidak 1,25 puntuko balioa izango du gehienez.
- b) Adierazten den kasurako ebazpen osoak 0,75 puntuko balioa izango du gehienez.

##### A.2 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- Planoarekiko perpendikularra den zuzena lortzeak 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.  
Tarteko puntua kalkulatzek 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.  
Puntu simetrikoa kalkulatzek 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.  
Puntuen arteko distantzia kalkulatzek 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.

##### A.3 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- Problema planteatzek eta helburu-funtzioaren muturreko puntuak lortzeko, gehienez, puntu bateko balioa izango dute bien artean.  
Soluzioa mutur motari buruz eztabaidatuz lortzeko puntu bateko balioa izango du gehienez.

##### A.4 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- a) Esparrua zuzen lortzeko, dagozkion hiru grafikoekin, puntu bateko balioa izango du gehienez.
- b) Esparruaren azalera Barrowen teorema aplikatuz lortzeko puntu bateko balioa izango du gehienez.

##### A.5 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- Egoera argitzeko azalpen on bat (eskema, taula, arrazoibidea eta abar) emateak 0,75 puntuko balioa izango du gehienez.
- Problemaren ebazpena zuzen kalkulatzek 1,25 puntuko balioa izango du gehienez.



## CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

---

### B AUKERA

#### B.1 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- a) Determinantea,  $m$ -ren funtzioan, zuzen lortzeak eta, ondoren, heinari buruz eztabaidatzeak, gehienez, 1,25 puntuko balioa izango dute bien artean.
- b) Alderantzizko matrizea lortzeak 0,75 puntuko balioa izango du gehienez.

#### B.2 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

Ataletariko bakoitzak, gehienez, puntu bateko balioa izango du.

#### B.3 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- a) A eta B zuzen kalkulatzeko eta C parametroari buruzko eztabaidak, gehienez, 0,75 puntuko balioa dute bien artean.
- b) Zer mutur mota den zehazteak 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.
- c) Azkenik, kurba marrazteak 0,75 puntuko balioa izango du gehienez.

#### B.4 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

Azalpen teorikoak 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.

Integral bakoitzak 0,75 puntuko balioa izango du gehienez.

#### B.5 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- Egoera argitzeko azalpen on bat emateak (zer termino batu behar diren adieraziz, formulak edo ekuazioak lortuz) 0,75 puntuko balioa izango du gehienez.
- Problema zuzen ebazteak 1,25 puntuko balioa izango du gehienez.



## EBAZPENAK

### A AUKERA

#### A.1 ariketa

- a) Koefiziente-matrizearen determinantea  $-(a-1)^2$  da;  $a = 1$  denean baino ez da zero.
- $a = 1$  denean, matrizearen eta matrize zabalduaren heina 2 da; beraz, sistema bateragarri indeterminatua da.
  - $a$ -ren balioa 1 ez denean, koefiziente-matrizearen heina 3 da; beraz, sistema bateragarri determinatua da.
- b) Bateragarri indeterminatua den kasurako ebaztea eskatzen digutenez,  $a = 1$  izango dugu, eta hau ebatziz lortzen da soluzioa:

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ y = -1 + z \end{cases} \text{ eta hortik: } \begin{cases} x = 2 - 2z \\ y = -1 + z \\ z = z \end{cases}$$

#### A.2 ariketa

- a) Zuzen horren plano perpendikular guztien ekuazioak  $4x + 8y + 4z + D = 0$  dira, zeren eta  $(4, 8, 4)$  bektorea planoaren bektore normala baita ( $r$  zuzena osatzen duten bi planoen bektore normalen biderkadura bektorial gisa lortua).  $P(1, 0, -2)$  puntutik pasatzen den plano interesatzen zaigunez, hau lortuko dugu:  $D = 4$ . Orain, zuzenaren eta lortutako planoaren arteko ebaki-puntuaren koordinatuak kalkulatu ditugu. Hala,  $M(2, -1, -1)$  puntua lortuko dugu. Beraz, hau izango da eskatutako zuzenaren ekuazioa:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}.$$

- b) **PM** bektorea  $(1, -1, 1)$  denez, haren modulua **PM**-ren distantzia izango da, hau da,  $PM = \sqrt{3}$ ; beraz, eskatutako distantzia  $PQ = 2\sqrt{3}$  izango da.

#### A.3 ariketa

Deribatua zein puntutan den 0 bilatuko ditugu:

$$B'(n) = -24n^2 + 120n - 96.$$

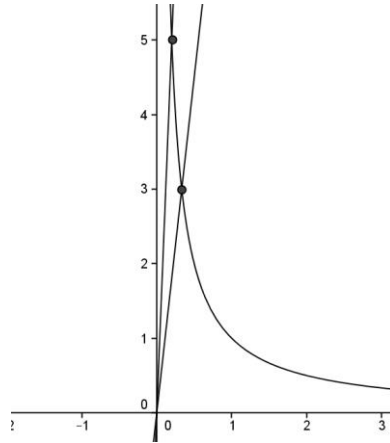
Deribatuaren balioa zero izatea dakarten puntuak hauek dira:  $n = 1$  eta  $n = 4$ . Maximoa zein den jakiteko, bigarren deribatua erabiliko dugu:

$$B''(n) = -48n + 120.$$

$n = 1$  denean, minimo bat dago, eta  $n = 4$  denean, maximo bat dago. Asteko irabaziak 64.000 euro izango dira.

#### A.4 ariketa

a)



Zuzenek hiperbola ebakitzen duten puntuak  $1/5$  eta  $1/3$  dira.

b) Esparru horren azalera hau izango da:

$$A = \int_0^{1/5} (25x - 9x) + \int_{1/5}^{1/3} \left(\frac{1}{x} - 9x\right) = \frac{8}{25} + \ln\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{9}{50} - \frac{1}{2} = \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

#### A.5 ariketa

Arreta jarritz gero, hau ikusten da:

$$\begin{array}{ll} 3^1 = 3 & 7^1 = 7 \\ 3^2 = 9 & 7^2 = 49 \\ 3^3 = 27 & 7^3 = 343 \\ 3^4 = 81 & 7^4 = 2401 \end{array} \quad \text{eta}$$

Horrek esan nahi du lau berreturaz behin amaierak errepikatu egiten direla. Beraz,  $3^{120}$  zenbakiaren amaiera eta  $3^4$  zenbakiarena berdina da, hau da, 1; bestalde,  $7^{140}$  zenbakiaren amaiera eta  $7^4$  zenbakiarena berdina da, hau da, 1. Horrenbestez,  $N$  zenbakiaren batekoei dagokien digitua 1 da.





## EBAZPENAK

### B AUKERA

#### B.1 ariketa

a)  $A$ -ren heina 2 da gutxienez, zeren eta:  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$ .  $A$ -ren determinantea  $4m^2 - 12$

denez, zero izango da baldin eta  $m = \pm\sqrt{3}$  bada.  $m = \pm\sqrt{3}$  balioetarako,  $A$ -ren heina 2 izango da;  $m \neq \pm\sqrt{3}$  balioetarako, berriz,  $A$ -ren heina 3 izango da.

b)  $m = 0$  denean, hau da alderantzizko matrizea:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 0 & \frac{-3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{12} \end{pmatrix}.$$

#### B.2 ariketa

a) Eskatutako planoak zuzenaren bektore zuzentzailea izan behar luke bektore normaltzat, hau da,  $(1, 1, 3)$ . Horrenbestez, plano hori  $C$  puntutik pasatuko bada, hau bete behar da:

$$(x-2) \cdot 1 + (y-2) \cdot 1 + (z-3) \cdot 3 = 0.$$

Eskatutako ekuazioa hau izango da:  $x + y + 3z = 13$ .

b) Baldin eta zuzena  $A$ ,  $B$  eta  $C$  puntuetatik pasatzen bada, horrek esan nahi du lerrokatuta daudela, eta, beraz,  $AB$   $(1, 1, 3)$  eta  $AC$   $(1, 3, 3)$  bektoreek proportzionalak izan behar dute, baina hori ez da betetzen. Horrek esan nahi du zuzen hori ez dela existitzen.

#### B.3 ariketa

a) Funtzioaren deribatua  $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$  da.

Mutur bat du  $x = 0$  denean; beraz,  $B = 0$  betetzen da.

Mutur bat du  $x = 2$  denean; beraz,  $A = -3$  betetzen da.

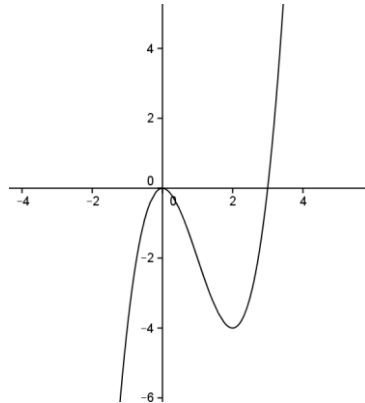
$A$ -ren eta  $B$ -ren balioak finkatuta gelditu dira, baina  $C$ -k edozein balio erreal har dezake.

Beraz, hau da funtzioa:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + C$

b)  $f$ -ren bigarren deribatua hau da:  $f'' = 6x - 6$ .

$x = 0$  denean, balio maximo bat du, eta  $x = 2$  denean, berriz, minimo bat.

c) Hau da  $f(x) = x^3 - 3x^2$  funtzioaren grafikoa:



#### B.4 ariketa

Zatikako integrazioaren metodoa biderkadura baten deribatuan oinarritzen da, eta biderkadura batzuen integralak ebazteko erabiltzen da.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\int (u \cdot v)' dx = \int u' \cdot v dx + \int u \cdot v' dx$$

$$u \cdot v = \int u' \cdot v dx + \int u \cdot v' dx$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

Emandako adibideetan zatikako integrazioa aplikatzeko eskatzen digute.

- $\ln(x) = u$ ;  $x dx = dv$  deituz, integrala erraz ebazten da.
- $x = u$ ;  $\cos(2x) dx = dv$  deituz, integrala erraz ebazten da.

#### B.5 ariketa

13ren ondok ondoko 25 multiploen batura honela adieraz daiteke:

$$a \cdot 13 + (a+1) \cdot 13 + (a+2) \cdot 13 + \dots + (a+24) \cdot 13 = 7150.$$

Bakanduz,  $a = 10$  lortzen da. Beraz, batura horretan agertzen den lehen multiploa 130 da, eta azkena, 442.