

Matematika II

- BATXILERGOA
- LANDIBE HEZIKETA
- GOI MAILAKO HEZIKETA ZIKLOAK

Azterketa

Kalifikazio eta zuzenketa irizpideak



eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

NAZIOARTEKO
BIKANTASUN
CAMPUSA

CAMPUS DE
EXCELENCIA
INTERNACIONAL



Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu. Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

A AUKERA

A1 Ariketa

Ekuzio linealen sistema hau emanda:

$$x - 2y - z = -1$$

$$ax - y + 2z = 2$$

$$x + 2y + az = 3$$

- Eztabaidatu ezazu nola jokatzen duen sistemak a parametroaren balioen arabera.
- Ebatzi ezazu sistema soluzio bat baino gehiago dituenean.

A2 Ariketa

$r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$ zuzena eta $2x - y + Az = 0$ planoak izanik,

- Kalkula ezazu A -ren balioa zuzena eta planoak paralelo izan daitezela.
- Aurkitu ezazu plano bat r zuzenarekiko perpendikularra dena eta koordinatu-jatorritik pasatzen dena.

A3 Ariketa

Har dezagun funtzio hau: $f(x) = ax^3 + bx + c$.

- Lor itzazu a -ren, b -ren eta c -ren balioak, funtzioa koordinatu-jatorritik pasatzen dadin eta $(1, -1)$ puntuan minimo bat izan dezan.
- Hala lortutako funtzioak ba al du beste maximorik edo minimorik?

A4 Ariketa

Har dezagun kontuan $y = -x^2 + 2x$ kurbak eta $y = x^2 - 10x$ kurbak mugatutako esparrua.

- Marratu ezazu esparrua.
- Kalkula ezazu esparru horren azalera.

A5 Ariketa

Izan bedi N zenbaki hau: $N = 2^a \cdot 3^b$. Lor ezazu N -ren batekoei dagokien digitua kasu hauetan:

- $a = 2014$, $b = 2014$
- $a = 800$, $b = 805$

B AUKERA

B1 Ariketa

Matrize hau emanda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- Aurkitu ezazu A matrizeak a parametroaren zer baliotarako ez duen alderantzizkorik.
- Kalkula ezazu, ahal bada, A -ren alderantzizko matrizea $a = -2$ baliorako, eta, ezin bada, arrazoitu ezintasunaren zergatia.

B2 Ariketa

Kalkula itzazu bi baldintza hauek betetzen dituen puntu baten koordenatuak:

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2} \quad \text{zuzenaren puntua izatea eta}$$

$$3x + 4y - 1 = 0 \quad \text{eta} \quad 4x - 3y + 9 = 0 \quad \text{planoetatik distantzia berera izatea.}$$

B3 Ariketa

Badakigu F funtzioa puntu guztietan deribagarria dela, $(-\infty, 0]$ tartean $F(x) = 1 + 2x + Ax^2$ formulak definitzen duela eta $(0, \infty)$ tartean, berriz, formula honek definitzen duela: $F(x) = B + Ax$

- Aurkitu ezazu zer balio izan behar duten A -k eta B -k aurreko baldintzak bete daitezen.
- Irudika ezazu F .

B4 Ariketa

Kalkula itzazu integral mugagabe hauek, eta azaldu ezazu ebazteko metodoa.

a) $\int x \cdot \cos(3x) dx$

b) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$

B5 Ariketa

Denda batek armairu eta mahai batzuk erosi ditu. Armairu bakoitzak 649 € balio du, eta mahai bakoitzak 132 €. Dendaren arduraduna ez da gogoratzen prezio osoa 2.761 € ala 2.716 € izan den.

- Zenbat ordaindu du zehazki? Arrazoitu erantzuna.
- Zenbat armairu eta zenbat mahai erosi ditu zehazki?



MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa guztira 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik egotekotan).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1 ariketa (2 puntu)

- Sistema modu egokian ebaztea eta eztabaidatzea (puntu bat)
- Problema ondo ebaztea $a = 3$ kasuan (puntu bat)

A.2 ariketa (2 puntu)

- Problema modu egokian planteatzea eta A -ren balio zuzena lortzea (puntu bat)
- Eskatutako planoaren lortzea (puntu bat)

A.3 ariketa (2 puntu)

- Hiru parametroak lortzea baldintzak jarrita (puntu bat)
- Funtzioaren zirriborroa marraztea (puntu bat)

A.4 ariketa (2 puntu)

- Bi parabolak marraztea eta esparrua lortzea (puntu bat)
- Esparruaren azalera lortzea Barrow-ren erregela aplikatuz (puntu bat)

A.5 ariketa (2 puntu)

- Zenbakien amaierari dagozkien erregularitasunak lortzea eta problema ondo ebaztea a) atalean (puntu bat).
- Erregularitasunak lortzea eta problema ebaztea b) atalean (puntu bat).



B AUKERA

B.1 ariketa (2 puntu)

- Matrizearen determinantea modu egokian ebaztea eta eztabaidatzea (puntu bat)
- Alderantzizko matrizea lortzea $a = -2$ kasurako (puntu bat)

B.2 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea zuzenaren puntu bat planoekiko distantziakidea izatearen baldintza ezarrita (puntu bat)
- Soluzio diren bi puntuak ondo ebaztea (puntu bat)

B.3 ariketa (2 puntu)

- Parametroak lortzea deribagarritasunaren eta jarraitutasunaren baldintza ezarrita (puntu bat)
- Funtzioaren zirriborroa marraztea (puntu bat)

B.4 ariketa (2 puntu)

- Lehen integrala kalkulatzeko (puntu bat).
- Bigarren integrala kalkulatzeko (puntu bat).

B.5 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea, dela modu analitikoan, dela taula baten bidez edo beste prozeduraren baten bidez (puntu bat).
- Zuzen ebaztea edozein prozedura erabilita (puntu bat)



EBAZPENAK

A AUKERA

A.1 ariketa

- a) Sistemaren determinantea $|A| = 2a^2 - 3a - 9$ da, eta balio gabetu egiten da $a = 3$ y $a = -3/2$ balioetarako. Beraz, bi balio horiek kenduta, sistema bateragarria eta mugatua da a -ren beste edozein balioetarako.
- $a = -3/2$ baliorako, matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduaren heina 3 da; beraz, sistema bateraezina da.
 - $a = 3$ baliorako, matrizearen eta zabalduaren heina 2 da; beraz, sistema bateragarri mugagabea da (hori da b atalean aztertu beharreko kasua).
- b) $a = 3$ baliorako, hau da sistemaren soluzioa: $x = m$, $y = m$, $z = 1 - m$; beraz, hau da soluzioa: $(m, m, 1 - m)$, m -ren balioa errealia izanik.

A.2 ariketa

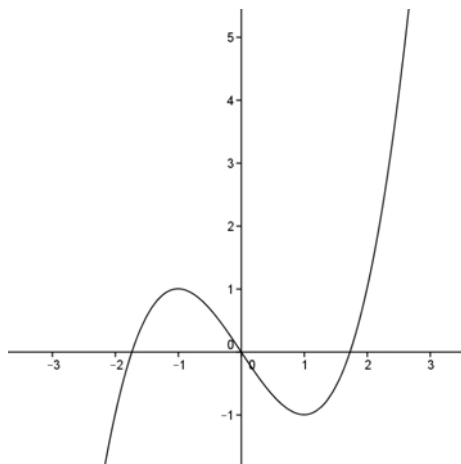
- a) Paraleloak izango badira, planoaren bektore normalak eta zuzenaren bektore zuzentzaileak perpendikularrak izan behar dute. Horrenbestez, haien biderkadura eskalarrak zero izan behar du. Planoaren bektore normala $(2, -1, A)$ da, eta zuzenaren bektore zuzentzailea $(5, 8, 1)$ da. Bikerkadura eskalarraren baldintza ezarrita, hau ateratzen da: $A = -2$.
- b) Zuzenarekiko perpendikularra den eta koordinatu-jatorritik pasatzen den planoaren $5x + 8y + z = 0$ da, badakigulako zein den haren bektore normala (zuzenaren bektore zuzentzailea) eta badakigulako, gainera, $(0, 0, 0)$ puntutik pasatzen dela.

A.3 ariketa

- a) Jatorritik pasatu behar duelako baldintza ezarrita, $c = 0$ lortuko dugu; funtzioak $A(1, -1)$ puntua edukitzeagatik, $a + b = 1$ baldintza lortuko dugu; A -n minimo bat izateagatik, $3a + b = 0$ izatea lortuko dugu. Ebatziz, hau ateratzen da:

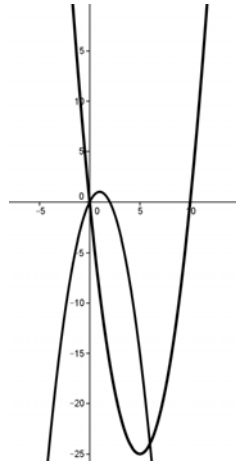
$$a = 1/2, b = -3/2, c = 0; \text{ beraz, hau da funtzioa: } f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

- b) $(-1, 1)$ puntuan maximo lokal bat iristen du. Funtzioaren gutxi gorabeherako marrazki bat



A.4 ariketa

a) Bi grafikoak parabolak dira.



Haien ebakidura-puntuak $x = 0$ eta $x = 6$ puntuak dira.

b) Horrenbestez, hau da eskatutako esparruaren azalera:

$$\int_0^6 [(-x^2 + 2x) - (x^2 - 10x)] dx = 72 \text{ unitate karratu.}$$

A.5 ariketa

a) Baldin eta $a = b = 2.014$, orduan $N = 6^{2014}$, eta 6an amaitzen da, jakina.

b) $a = 800$ eta $b = 805$ kasuetarako, hau jar dezakegu: $N = 6^{800} \cdot 3^5$. Biderketaren lehen terminoaren amaiera 6 da; bigarrenarena, berriz, 3 da. Horrenbestez, eskatutako amaiera 8 da.

B AUKERA

B.1 ariketa

a) A matrizeak ez du alderantzizkorik izango baldin eta haren determinantea zero bada. $|A| = 1 - a^2$ denez gero, A-k ez du alderantzizkorik izango $a = 1$ eta $a = -1$ balioetarako.

b) $a = -2$ baliorako, hau izango da haren alderantzizkoa:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

B.2 ariketa

Zuzenaren puntuak honela jar daitezke t parametroaren funtzioan:

$$x = 2t + 2; \quad y = 3t - 1; \quad z = 2t + 2$$

Distantziakidetasunaren baldintza ezarrita, hau ateratzen da:

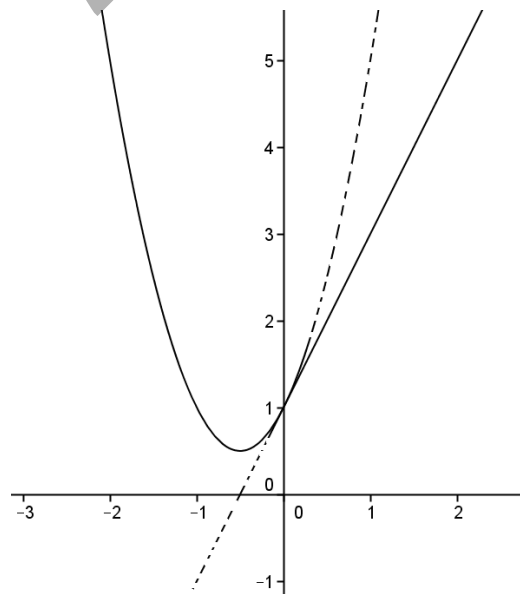
$$\left| \frac{3(2t + 2) + 4(3t - 1) - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{4(2t + 2) - 3(3t - 1) + 9}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right|$$

Garatuz eta balio absolutua kontuan hartuz, bi soluzio lortuko ditugu, $t = 1$ eta $t = -21/17$; beraz, bilatutako puntuak hauek dira:

$$(4, 2, 4) \quad \text{eta} \quad (-8/17, -80/17, -8/17)$$

B.3 ariketa

- a) Puntu guztietan deribagarria denez, puntu guztietan jarraitua da. $x = 0$ puntua aztertuko dugu, gainerako puntuetan ez baitago arazorik.
- b) Hau betetzen da; jarraitutasunagatik, $1 = B$ izatea, eta, gainera, deribagarria izateagatik, $A = 2$ izatea. Beraz, grafikoa hau da:



Zuzen batez eta parabola batez osatuta dago.



B.4 ariketa

a) Lehena zatika egingo dugu: $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos(3x)dx \end{cases}$. Hau da soluzioa:

$$I = \frac{x}{3} \cdot \sin(3x) + \frac{1}{9} \cdot \cos(3x) + C$$

b) Integral arrazional bat da, eta izendatzailearen erroak 1 eta -3 dira. Frakzio sinpletan deskonposaturik, hau ematen du:

$$I = \frac{-1}{4} \ln|x+3| + \frac{1}{4} \ln|x-1| + C$$

B.5 ariketa

Armairu kopurua x izanik eta mahai kopurua y izanik, baldintza hau jar genezake:

$$649x + 132y = \text{Prezio osoa}$$

Beraz, bi aukera daude:

$$649x + 132y = 2.761 \text{ edo, bestela, } 649x + 132y = 2.716.$$

x kasu bakoitzean bakanduta, hau izango dugu:

$$x = \frac{2761 - 132y}{649} \text{ edo, bestela, } x = \frac{2716 - 132y}{649}$$

$y = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ balioetarako probatuz bi kasuetan eta x -k zenbaki naturala izan behar duelako baldintza ezarrita, erantzun zehatz hau lortzen da:

a) 2.761 euro

b) $y = 16$ mahai eta $x = 1$ armairu dira.