2012 · UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBA

# Matematika II

· BATXILERGOA
· LANBIDE HEZIKETA
· GOI MAILAKO HEZIKETA-ZIKLOAK

**Azterketa**

**Kalifikazio eta zuzenketa irizpideak**

EUSKAMPUS
Nazioarteko Bikaintasun Campusa
Campus de Excelencia Internacional

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

| UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK | *PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD* |
| --- | --- |
| 2012ko EKAINA | *JUNIO 2012* |
| **MATEMATIKA II** | ***MATEMÁTICAS II*** |

***Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.***
***Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jarri behar duzula.***

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

***Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.***
***No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.***

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

# A AUKERA

**A1 ariketa**

Sistema hau emanda:

$$\begin{cases} x+(A+1)y+Az=A+1 \\ Ay+z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

a) Eztabaidatu ezazu $A$ parametroaren balioaren arabera.
b) Ebatz ezazu, ahal bada, $A$ = 4 kasurako.

**A2 ariketa**

A(1, 2, 3), B(1, -2, 4) eta C(1, -3, *a*) puntuak emanda:

a) Kalkula ezazu *a* parametroaren balioa A, B eta C puntuak lerrokatuta egon daitezen.
b) *a* = 5 kasuan, aurkitu ezazu jatorritik pasatzen den eta, gainera, A, B eta C puntuak dauzkan planoaren perpendikularra den zuzena.

**A3 ariketa**

$f(x)=Ax^3+Bx$ funtzioa izanik, badakigu P(1, 1) puntutik pasatzen dela eta, gainera, puntu horretan haren tangentea $y=-3x$ zuzenaren paraleloa dela.

a) Datu horiek jakinik, kalkula itzazu $A$-ren eta $B$-ren balioak.
b) Kalkula itzazu funtzioaren mutur erlatiboak eta goratze- eta beheratze-tarteak; azkenik, marraztu ezazu funtzioa.

**A4 ariketa**

$y=x^4$ eta $y=x^2$ kurbak izanik,

a) Marraztu ezazu bi kurben grafikoek mugatutako esparru finitua.
b) Kalkula ezazu esparru horren azalera.

**A5 ariketa**

Institutu bateko patioan 80 ikasle daude, 8 lerro eta 10 zutabetan lerrokatuta. Ikasle bakoitzak eskua eman die inguruan dituen ikasle guztiei. Baldin eta bi pertsonaren arteko esku-ematea esku-emate bat baldin bada, zenbat esku-emate izan ziren guztira?

# B AUKERA

## B1 aukera

$(a,b)$ zenbaki errealen bikote bakoitzerako, matrize hauek daude:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ eta } B=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Kalkula itzazu *A* eta *B* matrizeen determinanteak.
b) *a* = *b* = 1 kasurako, kalkula ezazu $A\cdot B$ biderkadura-matrizearen determinantea.
c) Kalkula ezazu, arrazoituz, *a*-ren eta *b*-ren zer baliotarako betetzen den bi matrizeek alderantzizko matrizerik ez izatea.

## B2 ariketa

*x* + *y* + *z* = 4 planoa AB segmentuarekiko perpendikularra da, eta bi zati berdinetan erdibitzen du segmentua. A puntua (1, 0, 0) da.
Aurkitu itzazu B puntuaren koordenatuak, eta kalkula ezazu AB segmentuaren eta planoaren arteko ebaki-puntua.

## B3 ariketa

Enpresa batek estalkirik gabeko kartoizko kaxak egiten ditu, 4.000 zentimetro kubikoko bolumenekoak. Kaxen oinarria karratua da.
Kalkula ezazu zer altuera duen eta oinarrian zer alde izan behar duen kaxa bakoitzak fabrikazioan ahal den kartoirik gutxiena erabiltzeko.

## B4 ariketa

Kalkula itzazu integral hauek:

a) $\int 2x^3 \ln(x)dx$
b) $\int \frac{x-2}{x^2-1}dx$

## B5 ariketa

Frogatu ezazu 6 aldeko poligono konbexu batek 9 diagonal dituela.

a) Zenbat diagonal izango ditu *n* aldeko poligono konbexu batek?
b) Zenbat alde ditu 230 diagonal dituen poligono konbexu batek?

# MATEMATIKA II

## EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa guztira 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, eta abar ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, eta abar.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

## ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

### A AUKERA

**A.1 ariketa** (2 puntu)

a) Sistemaren eztabaidak, gehienez, 1,25 puntuko balioa izango du.
b) $A = 4$ kasurako ebazpen osoak, gehienez, 0,75 puntuko balioa du.

**A.2 ariketa** (2 puntu)

Ataletariko bakoitzak, gehienez, puntu bateko balioa du.

**A.3 ariketa** (2 puntu)

a) A eta B zuzen kalkulatzeak, gehienez, 0,5 puntuko balioa du.
b) Goratze- eta beheratze-tarteak kalkulatzeak, gehienez, 0,75 puntuko balioa du.
c) Kurba marrazteak, gehienez, 0,75 puntuko balioa du.

**A.4 ariketa** (2 puntu)

a) Grafikoen ebaketa-puntuak kalkulatzeak, gehienez, 0,5 puntuko balioa du.
b) Esparrua eta bi funtzioen grafikoak marrazteak, gehienez, 0,5 puntuko balioa du.
c) Dagokion integral mugatua aplikatuz esparruaren azalera kalkulatzeak, gehienez, puntu bateko balioa du.

**A.5 ariketa** (2 puntu)

- Adierazpen-eskema on bat egiteak edo egoera argitzeko azalpen bat emateak (ikasleen posizio motak bereiziz), gehienez, 0,75 puntuko balioa du.
- Problemaren ebazpena zuzen kalkulatzeak, gehienez, 1,25 puntuko balioa du.

## B AUKERA

**B.1 ariketa** (2 puntu)

a) Matrize bakoitzaren determinantea zuzen kalkulatzeak, gehienez, 0,5 puntuko balioa du.
b) Matrizeen biderkadura adierazitako balioetarako kalkulatzeak, gehienez, 0,5 puntuko balioa du.
c) Ezarritako baldintza betetzen duten balioak kalkulatzeak, gehienez, puntu bateko balioa du.

**B.2 ariketa** (2 puntu)

- Zuzenaren bektore zuzentzailea kalkulatzeak, gehienez, 0,5 puntuko balioa du.
- Tarteko puntua kalkulatzeak, gehienez, 0,75 puntuko balioa du.
- Puntu simetrikoa kalkulatzeak, gehienez, 0,75 puntuko balioa du.

**B.3 ariketa** (2 puntu)

- Problema planteatu eta helburu-funtzioa lortzeak, gehienez, puntu bateko balioa du.
- Soluzioa deribatuaren bidez kalkulatzeak, gehienez, puntu bateko balioa du.

**B.4 ariketa** (2 puntu)

- Integral bakoitzak, gehienez, puntu bateko balioa du.

**B.5 ariketa** (2 puntu)

a) Formula orokorra, azalpen egoki batez lagunduta, lortzeak, gehienez, 1,25 puntuko balioa du.
b) Alde kopurua kalkulatzeak, gehienez, 0,75 puntuko balioa du.

# EBAZPENAK

## A AUKERA

### A.1 ariketa

a) Koefiziente-matrizearen determinanteak A(1 - A) balio du.

- A desberdin 0 eta 1 denean, matrizearen heina 3 da, eta bat dator matrize zabalduaren heinarekin eta ezezagun kopuruarekin; beraz, kasu horietan sistema bateragarri determinatua da.
- A = 0 kasurako, bi matrizeen heina 2 da. Kasu horretan, sistema bateragarri indeterminatua da.
- Azkenik, A = 1 kasurako, koefiziente-matrizearen heina 2 da eta zabalduarena 3 da; beraz, sistema bateraezina da.

b) A = 4 soluzio bakarreko kasuetariko bat da. Hau da soluzioa:

$$(x,y,z)=(\frac{4}{3},\frac{-1}{3},\frac{4}{3})$$

### A.2 ariketa

a) Puntuak lerrokatuta daude AB bektorea eta AC bektorea proportzionalak direnean, hau da, m·AB = AC edo m (0, -4, 1) = (0, -5, a - 3). Bigarren koordenatua berdintzetik lortzen den ondorioa da proportzionaltasun-faktoreak m = 5/4 izan behar duela, eta hirugarrena berdintzetik, berriz, a = 17/4 dela. Gainerako balioetarako, hiru puntuak ez daude lerrokatuta.

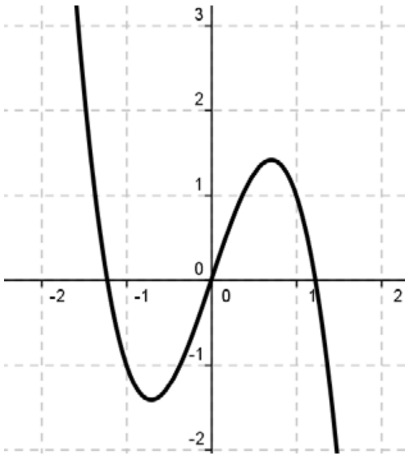
b) a = 5 denean, hauek dira puntuak: A = (1, 2, 3), B = (1,-2; 4) eta C = (1, -3, 5). Planoaren bektore propioa AB = (0, -4, 1) eta AC = (0,-5, 2) bektoreekiko perpendikularra da; beraz, v = (1, 0, 0) da, eta aurkitu nahi den zuzenak norabide-bektore hori du. Gainera, P = (0,0,0) puntutik pasatzen da; beraz, ekuazio parametriko hau du:

$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$ eta ekuazio kartesiarra, berriz, hau da: $$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

### A.3 ariketa

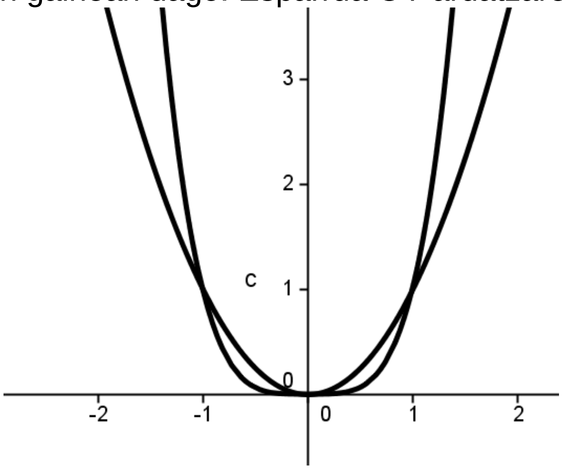
a) Grafikoak P = (1, 1) puntua daukanez, A + B = 1. Beste baldintzak berekin dakar *f*-ren deribatua –3 izatea x = 1 puntuan. Beraz, hau lortzen da: 3A + B = - 3. Ondorioz, A = –2 eta B = 3; eta hau da funtzioa: $f(x)=-2x^3+3x$

b) Lehen deribatua $f'(x)=-6x^2+3$ da, eta bigarren deribatua $f''(x)=-12x$ da. Beraz, muturrak $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ balioan —minimo bat da— eta $\frac{1}{\sqrt{2}}$ balioan —maximo bat da— daude. Funtzioa beherakorra da $(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{2}})$ tartean, gorakorra $(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ tartean eta beherakorra $(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty)$ tartean. Hau da haren grafikoa:




**A.4 ariketa**

a) Esparrua planoaren goialdean dago $-1 \leq x \leq 1$ denean, eta $y = x^2$ kurba $y = x^4$ kurbaren gainean dago. Esparrua OY ardatzarekiko simetrikoa da.




b) Hau da eskatutako azalera:

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]_{-1}^{1} = \frac{4}{15}$$

**A.5 ariketa**

Barnealdean dauden ikasleek inguruan dituzten 8 ikasleei ematen diete eskua. Kanpoaldeko lerroetan daudenek 5 ikasleri ematen diete eskua, izkinetan daudenek izan ezik, haiek 3ri baino ez baitiete ematen eskua. Kanpoaldeko lerroetan, guztira, 32 daude —izkinetan 4 eta alboetan 28—; barnealdean, berriz, gainerako 48ak daude. Gainera, kontuan hartu behar da bi ikasleren arteko esku-ematea esku-emate bakar moduan zenbatu behar dela. Beraz, hau izango da esku-emateen kopurua:

$$\frac{1}{2}(28 \times 5 + 4 \times 3 + 48 \times 8) = 268$$

# B AUKERA

## B.1 ariketa

a) Hauek dira: det(A) = 2(5a -4b + 2) eta det(B) = -a -4b + 6.
b) Biderkadura-matrizearen determinantea determinanteen biderkadura da. Beraz: det(A B) = 2(5a - 4b + 2)(-a -4b + 6); a = b = 1 kasu partikularrerako, 6 izango da.
c) Bi matrizeek alderantzizko matrizerik ez izateko, bi determinanteek zero izan behar dute; hau da, aldi berean bete behar dira 2(5a - 4b + 2) = 0 eta (-a - 4b + 6) = 0. Sistemaren soluzioa hau izango da: a = 2/3 eta b = 4/3.

## B.2 ariketa

a) eta b) Planoaren bektore propioa v = (1, 1, 1) da, eta hori da A eta B lotzen dituen zuzenaren norabide-bektorea. Hau da zuzenaren ekuazioa:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Aurkitu nahi den tarteko puntua planoan dago. Horregatik, hau beteko da: x + y + z - 4 = 0, hau da, (1 + t) + t + t - 4 = 0; hortik, t = 1 eta tarteko puntua C = (2, 1, 1) da. Azkenik, B puntuaren koordenatuek egiaztatzen dute C = 1/2(A+B) dela; hau da: B = 2C - A = (4, 2, 2) - (1, 0, 0) = (3, 2, 2).

## B.3 ariketa

Izan bitez *x* oinarriaren aldea eta *h* altuera. Bolumena $V = x^2.h = 4000$ da; alegia, kaxak estalkirik ez duenez, haren azalera osoa oinarriaren azalera, $x^2$, eta lau alde-azaleren batura da. Lau aldeen azalera hau da:

$$4.x.h = \frac{16000}{x}.$$

Beraz, *x* aldeko oinarria duen kaxa egiteko, kartoi-azalera hau behar da:

$$S(x) = x^2 + \frac{16000}{x}.$$

Minimizatzean, *x* = 20 baliorako lortzen da bilatu nahi den minimoa. Dagokion altuera hau da: *h* = 10.

## B.4 ariketa

a) Lehen integrala zatika integratuz lor daiteke. Hau da emaitza:

$$\int 2x^3.\ln(x)dx = \frac{-x^4}{8} + \frac{x^4\ln(x)}{2} + C$$

b) Bigarren integralerako, frakzio sinpletan deskonposatu behar da. Hau da emaitza:

$$\int \frac{x-2}{x^2-1}dx = \frac{-1}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x+1) + C$$

**B.5 ariketa**

a) Erpin bakoitzetik erpin guztietarako diagonalak irteten dira, bere burura eta aldameneko bietara izan ezik; alegia, *n* – 3 erpinetara. Guztira *n* erpin daudenez eta diagonalak bi aldiz zenbatuta daudenez, *n* aldeko poligono konbexu batek (1/2)*n*(*n*-3) diagonal ditu.

b) *n* aurkitu behar da, hau bete dadin: (1/2)*n*(*n*-3) = 230. Hau da emaitza: *n* = 23.